

# Analyse asymptotique d'un problème de diffraction multiple et justification d'un modèle de Foldy-Lax

P.H Cocquet<sup>(1)</sup>.

En collaboration avec A. Bendali<sup>(2)</sup> et S. Tordeux<sup>(3)</sup>.

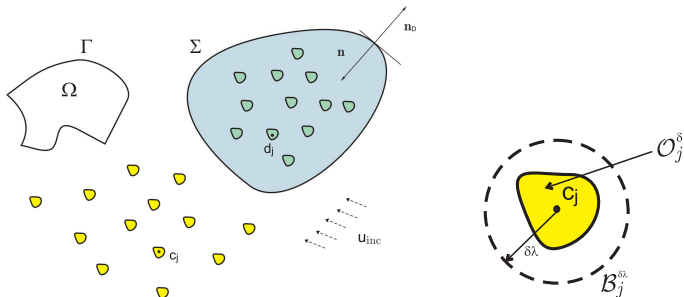
(1) Université de Genève.

(2) Université de Toulouse, INSA, IMT.

(3) Université de Pau, Projet Magique 3D, INRIA, LMA.

5-6/09/2013

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta + \kappa^2)u_\delta(x) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \left( \bigcup_{j=1}^N \overline{\mathcal{O}_j^\delta} \cup \overline{\Omega} \cup \overline{D} \right), \\ (\Delta + \kappa_D^2)v_\delta(x) = 0 \text{ dans } D \setminus \bigcup_{j=1}^N \overline{\mathcal{U}_j^\delta}, \\ \partial_{n_j} u_\delta = \alpha_j^\delta u_\delta \quad (j = 1, \dots, N), \\ \partial_{n_j} v_\delta = \beta_j^\delta v_\delta \quad (j = 1, \dots, M), \\ u_\delta = 0, \text{ sur } \partial\Omega \\ \\ (\partial_{|x|} - i\kappa) [u_\delta - u_{\text{inc}}] = \underset{|x| \rightarrow \infty}{\mathcal{O}} \left( \frac{1}{|x|} \right), \\ \text{Conditions de transmission pour } (u_\delta, v_\delta) \text{ sur } \Sigma. \end{array} \right.$$



(a) Géométrie de l'étude

(b) Petit objet

But :

Calculer une **bonne approximation** de  $(u_\delta, v_\delta)$  lorsque  $\delta \ll 1$ .

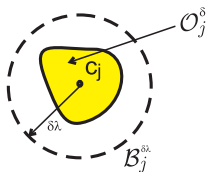


Figure: Géométrie d'un petit obstacle

Remarque :  $\delta \ll 1 \rightarrow$  Obstacles **petits** par rapport à  $\lambda$ .

- Introduit en 1944 par L.L. Foldy et repris en 1951 par M. Lax.
- Restreint au cas  $\mathcal{O}_j^\delta = \{c_j\}$  (**isotropic point scatterers**) et  $\Omega = D = \emptyset$ .
- Cas  $\Omega \neq \emptyset$  : K. Huang et P. Li, 2010.

- Introduit en 1944 par L.L. Foldy et repris en 1951 par M. Lax.
- Restreint au cas  $\mathcal{O}_j^\delta = \{c_j\}$  (**isotropic point scatterers**) et  $\Omega = D = \emptyset$ .
- Cas  $\Omega \neq \emptyset$  : K. Huang et P. Li, 2010.

## Modèle de Foldy-Lax :

(i) Recherche de  $u_\delta$  sous la forme :

$$u_\delta(x) = u_{\text{inc}}(x) + \sum_{j=1}^N A_j \frac{\exp(i\kappa|x - c_j|)}{4\pi|x - c_j|}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^N \{c_j\}.$$

où les  $A_j \in \mathbb{C}$  sont **inconnues**.

(ii)  $\mathcal{O}_j^\delta$  caractérisé par  $\sigma_j \in \mathbb{C}$  (**coefficient de réflexion**) :

$$A_j = \sigma_j \lim_{x \rightarrow c_j} \left( u_\delta(x) - A_j \frac{\exp(i\kappa|x - c_j|)}{4\pi|x - c_j|} \right).$$

(iii) Résolution d'un **système linéaire**

$$\sigma_j^{-1} A_j - \sum_{l \neq j} A_l \frac{\exp(i\kappa|c_l - c_j|)}{4\pi|c_l - c_j|} = u_{\text{inc}}(c_j), \quad j = 1 \dots N.$$

## Exemple :

- $\mathcal{O}_\delta^j = \mathcal{B}_{c_j}^\delta$  avec condition de **Dirichlet**.
- Définition de  $\sigma_j$  :

$$w(x) \sim u_{\text{inc}}(x) + \sigma_j u_{\text{inc}}(c_j) \frac{\exp(i\kappa|x - c_j|)}{4\pi|x - c_j|},$$

où  $x$  est proche de  $\mathcal{O}_\delta^j$  et

$$\begin{cases} (\Delta + \kappa^2)w = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}_\delta^j, \\ w = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}_\delta^j, \\ (\partial_{|x|} - i\kappa)[w - u_{\text{inc}}] = \underset{|x| \rightarrow \infty}{\circ} \left( \frac{1}{|x|} \right). \end{cases}$$

- Calcul de  $\sigma_j$  :

$$\sigma_j = -\frac{j_0(\kappa\delta)}{h_0(\kappa\delta)}, \quad j_0(z) = \frac{\sin(z)}{z}, \quad h_0(z) = \frac{\exp(iz)}{iz}.$$

## Hypothèses :

- (i)  $u_\delta$  peut être approchée par  $\sum_{j=1}^N A_j \frac{\exp(i\kappa|x-c_j|)}{4\pi|x-c_j|}$ .
- (ii)  $v_\delta$  peut être approchée par  $\sum_{j=1}^N B_j \frac{\exp(i\kappa_D|x-d_j|)}{4\pi|x-d_j|}$ .
- (iii) Les propriétés réfractives de  $\mathcal{O}_j^\delta, \mathcal{U}_j^\delta$  peuvent être décrites par leurs **coefficient de réflexion** :

$$A_j = \sigma_j w(c_j), \quad B_j = \tau_j w(d_j),$$

où  $w$  est une solution de Helmholtz compatible avec  $u_{\text{inc}}$  et les propriétés des matériaux contenant les petits objets.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \sigma_\ell^{-1} \mathbf{A}_\ell - \sum_{j \neq \ell} \frac{\exp(i\kappa|c_\ell - c_j|)}{4\pi|c_\ell - c_j|} \mathbf{A}_j - \mathbf{z}_\Omega(c_\ell) = \mathbf{u}_{\text{inc}}(c_\ell) \quad (\ell = 1, \dots, N), \\
 \tau_\ell^{-1} \mathbf{B}_\ell - \sum_{j \neq \ell} \frac{\exp(i\kappa_D|d_\ell - d_j|)}{4\pi|d_\ell - d_j|} \mathbf{B}_j - \mathbf{z}_D(d_\ell) = 0 \quad (\ell = 1, \dots, M), \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \Delta \mathbf{z}_\Omega + \kappa^2 \mathbf{z}_\Omega = 0 \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega \cup D}, \\
 \left( \mathbf{z}_\Omega + \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_j \frac{\exp(i\kappa|x - c_j|)}{4\pi|x - c_j|} \right) = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\
 (\partial_{|x|} - i\kappa) \mathbf{z}_\Omega = \underset{|x| \rightarrow \infty}{\mathbf{o}} \left( \frac{1}{|x|} \right),
 \end{array} \right. \\
 \\
 \Delta \mathbf{z}_D + \kappa_D^2 \mathbf{z}_D = 0 \text{ dans } D, \\
 \text{Conditions de transmission pour} \\
 \left( \mathbf{z}_\Omega + \sum_{j=1}^N \mathbf{A}_j \frac{\exp(i\kappa|x - c_j|)}{4\pi|x - c_j|}, \mathbf{z}_D + \sum_{j=1}^M \mathbf{A}_j \frac{\exp(i\kappa_D|x - d_j|)}{4\pi|x - d_j|} \right) \text{ sur } \Sigma.
 \end{array} \right.$$



## Approximation de Foldy-Lax étendue :

$$\begin{cases} u_{\delta}^{\text{FL}} = u_{\text{inc}} + z_{\Omega} + \sum_{j=1}^N A_j \frac{\exp(i\kappa|x-c_j|)}{4\pi|x-c_j|} & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \left( \bigcup_{j=1}^N \overline{\mathcal{O}_j^{\delta}} \cup \overline{\Omega} \cup \overline{D} \right) \\ v_{\delta}^{\text{FL}} = z_D + \sum_{j=1}^M B_j \frac{\exp(i\kappa_D|x-d_j|)}{4\pi|x-d_j|} & \text{dans } D \setminus \bigcup_{j=1}^N \overline{\mathcal{U}_j^{\delta}}. \end{cases}$$

### Objectif :

Justifier mathématiquement l'approximation de Foldy-Lax avec des **estimations d'erreur** entre  $(u_{\delta}, v_{\delta})$  et  $(u_{\delta}^{\text{FL}}, v_{\delta}^{\text{FL}})$ .

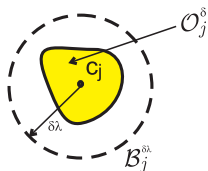
- Bien **comprendre la dépendance en  $\delta$**  de  $(u_{\delta}, v_{\delta})$ .
- Nécessité d'une **analyse asymptotique**.

- 1 Introduction du contexte
  
- 2 Analyse asymptotique du problème de diffraction multiple
  - Un problème de diffraction multiple simplifié
  - Extensions à des problèmes de diffraction plus généraux
  
- 3 Justification du modèle de Foldy-Lax étendu
  
- 4 Perspectives

- 1 Introduction du contexte
  
- 2 Analyse asymptotique du problème de diffraction multiple
  - Un problème de diffraction multiple simplifié
  - Extensions à des problèmes de diffraction plus généraux
  
- 3 Justification du modèle de Foldy-Lax étendu
  
- 4 Perspectives

# Problème de diffraction multiple simplifié

$$\begin{cases} (\Delta + \kappa^2)u_\delta(x) & = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^N \mathcal{O}_j^\delta, \\ \partial_{n_j} u_\delta & = \frac{\gamma_j}{\delta} u_\delta & \text{sur } \partial \mathcal{O}_j^\delta, \\ (\partial_{|x|} - i\kappa) [u_\delta - u_{\text{inc}}] & = o_{|x| \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{|x|} \right). \end{cases}$$



(a) Petit objet



(b) Géométrie de l'étude

## Théorème (Caractère bien posé)

Supposons que les impédances vérifient :

$$\text{Im } \gamma_j \leq 0, \quad \forall j = 1, \dots, N.$$

Alors le problème admet **une unique solution** dans  $H_{\text{loc}}^1 \left( \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^N \mathcal{O}_j^\delta \right)$ .

## Intérêt de la méthode :

- Bonne description de la dépendance en  $\delta$  de  $u_\delta$  :
  - (i) **Approximation** du champ loin des obstacles.
  - (ii) **Approximation** du champ proche des petits objets (Couches limites).

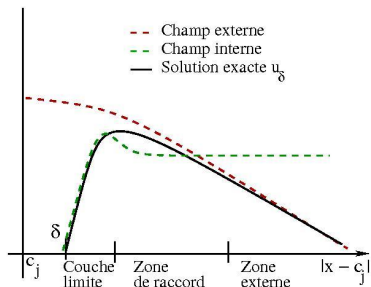


Figure: Idée des développements asymptotiques raccordés

## Champs externes :

$$u_\delta(x) = u_{m,\delta}(x) = \sum_{k=0}^m \delta^k u_k(x) + \underset{\delta \rightarrow 0}{o}(\delta^m), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^N \{c_j\}.$$

Champs internes : zoom sur  $\mathcal{O}_j^\delta$  avec  $X = \frac{x - c_j}{\delta}$ .

$$\Pi_{m,\delta}^{(j)}(X) = u_\delta\left(\frac{x - c_j}{\delta}\right) = \sum_{k=0}^m \delta^k \Pi_k^{(j)}(X) + \underset{\delta \rightarrow 0}{o}(\delta^m), \quad X \in \mathbb{R}^3 \setminus \widehat{\mathcal{O}}_j^\delta.$$

## Règles de raccords :

- Expression des **champs externes** en **variable rapide** :

$$u_{m,\delta}(c_j + \delta X) := \sum_{k=0}^m \delta^k u_k(c_j + \delta X) = \sum_{k=0}^m \delta^k \mathbf{U}_{m,k}^{(j)}(X) + \underset{\delta \rightarrow 0}{o}(\delta^m).$$

- Identification des termes de **même homogénéité** en  $\delta$  :

$$\mathbf{U}_{m,k}^{(j)} - \Pi_k^{(j)} = \underset{R \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{R^{m-k}} \right), \quad \left( \frac{1}{R} \right)^{m-k} = \left( \frac{\delta}{|x - c_j|} \right)^{m-k},$$

$$(R, \Theta) = \left( \frac{|x - c_j|}{\delta}, \frac{x - c_j}{|x - c_j|} \right).$$

## Règles de raccords :

- Expression des **champs externes** en **variable rapide** :

$$u_{m,\delta}(c_j + \delta X) := \sum_{k=0}^m \delta^k u_k(c_j + \delta X) = \sum_{k=0}^m \delta^k \mathbf{u}_{m,k}^{(j)}(X) + \underset{\delta \rightarrow 0}{o}(\delta^m).$$

- Identification des termes de **même homogénéité** en  $\delta$  :

$$\mathbf{u}_{m,k}^{(j)} - \Pi_k^{(j)} = \underset{R \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{R^{m-k}} \right), \quad \left( \frac{1}{R} \right)^{m-k} = \left( \frac{\delta}{|x - c_j|} \right)^{m-k},$$
$$(R, \Theta) = \left( \frac{|x - c_j|}{\delta}, \frac{x - c_j}{|x - c_j|} \right).$$

## Questions naturelles :

- 1) Existence et unicité du développement à tout ordre ?
- 2) Estimations d'erreurs ?

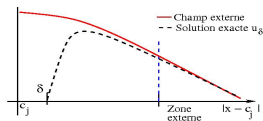


## Définition :

$$u_\delta(x) = u_{m,\delta}(x) = \sum_{k=0}^m \delta^k u_k(x) + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^m), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^N \{c_j\}.$$

## Équations des champs externes :

$$\begin{cases} (\Delta + \kappa^2)u_k(x) = 0, & \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^N \{c_j\}, \\ (\partial_{|x|} - i\kappa)(u_k - \delta_k^0 u_{inc}) = o_{|x| \rightarrow \infty}(|x|^{-1}). \end{cases}$$

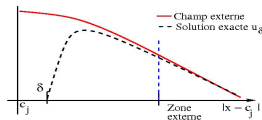


## Définition :

$$u_\delta(x) = u_{m,\delta}(x) = \sum_{k=0}^m \delta^k u_k(x) + \underset{\delta \rightarrow 0}{o}(\delta^m), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^N \{c_j\}.$$

## Équations des champs externes :

$$\begin{cases} (\Delta + \kappa^2)u_k(x) = 0, & \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^N \{c_j\}, \\ (\partial_{|x|} - i\kappa)(u_k - \delta_k^0 u_{\text{inc}}) = o_{|x| \rightarrow \infty}(|x|^{-1}). \end{cases}$$



## Représentation de $u_k$ :

$$u_k(x) = \delta_k^0 u_{\text{inc}}(x) + \sum_{j=1}^N \sum_{n \geq 0} h_n^{(1)}(\kappa|x - c_j|) Y_{n,k}^{(j)} \left( \frac{x - c_j}{|x - c_j|} \right), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^N \{c_j\},$$

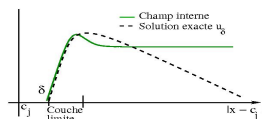
- $Y_{n,k}^{(j)} = \sum_{|m| \leq n} \alpha_{n,k}^{m,(j)} Y_n^m(\Theta)$ ,  $\alpha_{n,k}^{m,(j)}$  = constantes inconnues.
- $Y_n^m$  = Harmoniques sphériques de degré  $n$ .
- $h_n^{(1)}$  = Fonctions de Hankel sphériques d'ordre  $n$  de première espèce.

## Définition des champs internes :

$$\Pi_{m,\delta}^{(j)}(X) = u_\delta \left( \frac{X - c_j}{\delta} \right) = \sum_{k=0}^m \delta^k \Pi_k^{(j)}(X) + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^m), \quad X \in \mathbb{R}^3 \setminus \widehat{\mathcal{O}}_j^\delta.$$

## Équations des champs internes :

$$\begin{cases} \Delta \Pi_k^{(j)} &= -\kappa^2 \Pi_{k-2}^{(j)} & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \widehat{\mathcal{O}}_j^\delta, \\ \partial_R \Pi_k^{(j)} &= \gamma_j \Pi_k^{(j)} & \text{sur } \partial \widehat{\mathcal{O}}_j^\delta, \end{cases}$$

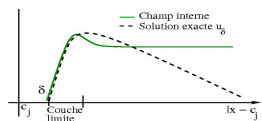


## Définition des champs internes :

$$\Pi_{m,\delta}^{(j)}(X) = u_\delta \left( \frac{X - c_j}{\delta} \right) = \sum_{k=0}^m \delta^k \Pi_k^{(j)}(X) + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^m), \quad X \in \mathbb{R}^3 \setminus \widehat{\mathcal{O}}_j^\delta.$$

## Équations des champs internes :

$$\begin{cases} \Delta \Pi_k^{(j)} &= -\kappa^2 \Pi_{k-2}^{(j)} & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \widehat{\mathcal{O}}_j^\delta, \\ \partial_R \Pi_k^{(j)} &= \gamma_j \Pi_k^{(j)} & \text{sur } \partial \widehat{\mathcal{O}}_j^\delta, \end{cases}$$



## Formule de représentation pour $R = |X|$ grand :

- Par **séparation des variables** :

$$\Pi_k^{(j)}(R, \Theta) = \sum_{n \geq 0} \sum_{|m| \leq n} \left\{ \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} c_{l,n,k}^{m,(j)} R^{-(n+1)+2l} + d_{l,n,k}^{m,(j)} R^{n+2l} \right\} Y_n^m(\Theta).$$

où  $c_{l,n,k}^{m,(j)}$  et  $d_{l,n,k}^{m,(j)}$  sont des constantes.

Détermination de  $u_0$  :

$$u_0(x) = u_{\text{inc}}(x) + \sum_{j=1}^N \sum_{n \geq 0} h_n^{(1)}(\kappa|x - c_j|) Y_{n,0}^{(j)} \left( \frac{x - c_j}{|x - c_j|} \right), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^N \{c_j\},$$

(i) Expression de  $u_0$  en **variables rapides** :

$$u_0(c_j + \delta R \Theta) = u_{\text{inc}}(c_j) + \sum_n h_n(\kappa \delta R) Y_{n,0}^{(j)} + \underset{\delta \rightarrow 0}{\mathcal{O}}(1).$$

(ii)  $h_n^{(1)}(\kappa \delta R) \underset{\delta \rightarrow 0}{\sim} C_n(\kappa \delta R)^{-n-1} \longrightarrow Y_{n,0}^{(j)} = 0 :$

Bilan :  $u_0 = u_{\text{inc}}$ .

## Détermination de $u_0$ :

$$u_0(x) = u_{\text{inc}}(x) + \sum_{j=1}^N \sum_{n \geq 0} h_n^{(1)}(\kappa|x - c_j|) Y_{n,0}^{(j)} \left( \frac{x - c_j}{|x - c_j|} \right), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^N \{c_j\},$$

(i) Expression de  $u_0$  en **variables rapides** :

$$u_0(c_j + \delta R\Theta) = u_{\text{inc}}(c_j) + \sum_n h_n(\kappa\delta R) Y_{n,0}^{(j)} + \underset{\delta \rightarrow 0}{\mathcal{O}}(1).$$

(ii)  $h_n^{(1)}(\kappa\delta R) \underset{\delta \rightarrow 0}{\sim} C_n(\kappa\delta R)^{-n-1} \longrightarrow Y_{n,0}^{(j)} = 0 :$

Bilan :  $u_0 = u_{\text{inc}}$ .

## Détermination de $\Pi_0^{(j)}$ :

(i) Fonctions de raccords :  $u_0(c_j + \delta R\Theta) = u_{\text{inc}}(c_j) + \underset{\delta \rightarrow 0}{\mathcal{O}}(1) = U_{0,0}^{(j)} + \underset{\delta \rightarrow 0}{\mathcal{O}}(1)$ .

(ii)  $\Pi_0^{(j)}$  est solution de : 
$$\begin{cases} \Delta \Pi_0^{(j)} & = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^3 \setminus \widehat{\mathcal{O}}_j^\delta, \\ \partial_R \Pi_0^{(j)} & = \gamma_j \Pi_0^{(j)} & \text{sur } \partial \widehat{\mathcal{O}}_j^\delta, \\ \mathbf{u}_{0,0}^{(j)} - \Pi_0^{(j)} & = \mathcal{O}_{R \rightarrow +\infty}(1). \end{cases}$$

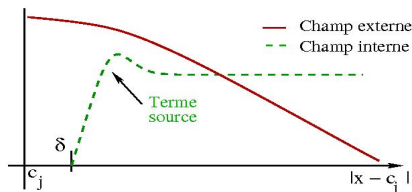
(iii) Résolution en travaillant avec l'espace de **Beppo-Levi**.

## Hypothèse de récurrence (HR) :

- $(u_l, \Pi_l^{(j)})$  **existent** pour tout  $l = 0, \dots, k$  et vérifient les **règles de raccords**.

## Problème vérifié par $u_{k+1}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta + \kappa^2)u_{k+1}(x) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^N \{c_j\}, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - i\kappa) u_{k+1} = 0, \\ \sum_{l=0}^{k+1} \delta^l u_l(c_j + \delta R\Theta) - \sum_{l=0}^{k+1} \delta^l \mathbf{u}_{k+1,l}^{(j)}(R, \Theta) = o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^{k+1}), \\ \mathbf{u}_{k+1,l}^{(j)} - \Pi_l^{(j)} = o_{R \rightarrow +\infty}(R^{l-k-1}), \quad l = 0, \dots, k. \end{array} \right.$$



(i) Représentation explicite de  $u_{k+1}$  :

$$u_{k+1}(x) = \sum_{j=1}^N \sum_{n=0}^k h_n^{(1)}(\kappa|x - c_j|) Y_{n,k+1}^{(j)} \left( \frac{x - c_j}{|x - c_j|} \right), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^N \{c_j\}.$$



(i) Représentation explicite de  $u_{k+1}$  :

$$u_{k+1}(x) = \sum_{j=1}^N \sum_{n=0}^k h_n^{(1)}(\kappa|x - c_j|) Y_{n,k+1}^{(j)} \left( \frac{x - c_j}{|x - c_j|} \right), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^N \{c_j\}.$$

(ii) Relations de récurrence :

- $\mathbf{U}_{k+1,l}^{(j)} = \mathbf{U}_{k,l}^{(j)} + R^{l-k-1} \sum_{t=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} N_{2t+k-l,t} Y_{2t+k-l,k+1}^{(j)}(\Theta), \quad l \leq k.$
- $\Delta \mathbf{U}_{m,n}^{(j)} = -\kappa^2 \mathbf{U}_{m,n-2}^{(j)}, \quad \forall m \in \mathbb{N} \text{ et } n = 0, \dots, m.$

(iii) Propriétés additionnelles de  $\varphi_{k,l} = \mathbf{U}_{k,l}^{(j)} - \Pi_l^{(j)}$  :

- $\Delta \varphi_{k,l} = -\kappa^2 \varphi_{k,l-2}$  dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \widehat{\mathcal{O}}_j^\delta$ ,  $\varphi_{k,l} = \underset{R \rightarrow +\infty}{\mathcal{O}}(R^{l-k-1})$ .
- Par séparation de variables, pour  $|X|$  grand :

$$\varphi_{k,l} = R^{l-k-1} \sum_{t=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} \mathcal{Y}_{2t+k-l,k,l}(\Theta) + \underset{R \rightarrow +\infty}{\mathcal{O}}(R^{l-k-1}).$$

(i) Représentation explicite de  $u_{k+1}$  :

$$u_{k+1}(x) = \sum_{j=1}^N \sum_{n=0}^k h_n^{(1)}(\kappa|x - c_j|) Y_{n,k+1}^{(j)} \left( \frac{x - c_j}{|x - c_j|} \right), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^N \{c_j\}.$$

(ii) Relations de récurrence :

- $\mathbf{U}_{k+1,l}^{(j)} = \mathbf{U}_{k,l}^{(j)} + R^{l-k-1} \sum_{t=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} N_{2t+k-l,t} Y_{2t+k-l,k+1}^{(j)}(\Theta), \quad l \leq k.$
- $\Delta \mathbf{U}_{m,n}^{(j)} = -\kappa^2 \mathbf{U}_{m,n-2}^{(j)}, \quad \forall m \in \mathbb{N} \text{ et } n = 0, \dots, m.$

(iii) Propriétés additionnelles de  $\varphi_{k,l} = \mathbf{U}_{k,l}^{(j)} - \Pi_l^{(j)}$  :

- $\Delta \varphi_{k,l} = -\kappa^2 \varphi_{k,l-2}$  dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \widehat{\mathcal{O}}_j^\delta, \quad \varphi_{k,l} = \underset{R \rightarrow +\infty}{o} \left( R^{l-k-1} \right).$
- Par séparation de variables, pour  $|X|$  grand :

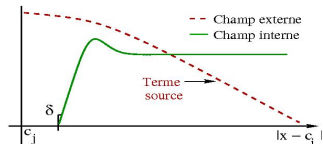
$$\varphi_{k,l} = R^{l-k-1} \sum_{t=0}^{\lfloor l/2 \rfloor} \mathcal{Y}_{2t+k-l,k,l}(\Theta) + \underset{R \rightarrow +\infty}{o} \left( R^{l-k-1} \right).$$

(iv) Détermination des  $Y_{n,k+1}^{(j)}$  par le raccord  $\mathbf{U}_{k+1,l}^{(j)} - \Pi_l^{(j)} = \underset{R \rightarrow +\infty}{o} \left( R^{l-k-1} \right)$  :

$$Y_{2t+k-l,k+1}^{(j)} = -\frac{\mathcal{Y}_{2t+k-l,k,l}}{N_{2t+k-l,t}}, \quad \forall l = 0, \dots, k \quad \forall t = 0, \dots, \lfloor l/2 \rfloor.$$

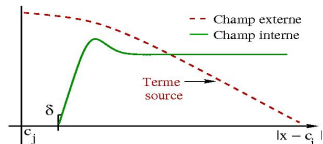
**Problème vérifié par  $\Pi_{k+1}^{(j)}$  :**

$$\begin{cases} \Delta \Pi_{k+1}^{(j)} = -\kappa^2 \Pi_{k+1}^{(j)} & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \widehat{\mathcal{O}}_j^\delta, \\ \partial_R \Pi_{k+1}^{(j)} = \gamma_j \Pi_{k+1}^{(j)} & \text{sur } \partial \widehat{\mathcal{O}}_j^\delta, \\ \Pi_{k+1}^{(j)} - \mathbf{U}_{k+1,k+1}^{(j)} = \underset{R \rightarrow +\infty}{o}(1). \end{cases}$$



**Problème vérifié par  $\Pi_{k+1}^{(j)}$  :**

$$\begin{cases} \Delta \Pi_{k+1}^{(j)} = -\kappa^2 \Pi_{k-1}^{(j)} \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \widehat{\mathcal{O}}_j^\delta, \\ \partial_R \Pi_{k+1}^{(j)} = \gamma_j \Pi_{k+1}^{(j)} \text{ sur } \partial \widehat{\mathcal{O}}_j^\delta, \\ \Pi_{k+1}^{(j)} - \mathbf{U}_{k+1,k+1}^{(j)} = \underset{R \rightarrow +\infty}{o} (1). \end{cases}$$



**Existence et unicité de  $\Phi = \Pi_{k+1}^{(j)} - \mathbf{U}_{k+1,k+1}^{(j)}$  :**

(i) Formulation variationnelle :  $a(\Phi, \Psi) = l(\Psi)$

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_1} \langle \nabla \Phi, \overline{\nabla \Psi} \rangle dx + \gamma_j \int_{\partial \mathcal{B}_1} \Phi \overline{\Psi} d\sigma = \int_{\partial \mathcal{B}_1} g \overline{\Psi} d\sigma - \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}_1} F \overline{\Psi} dx, \quad \forall \Psi \in \text{BL}.$$

$$\text{BL} = \left\{ \Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \setminus \widehat{\mathcal{O}}_j^\delta) \mid \frac{\Phi}{\sqrt{1+|\mathbf{x}|^2}} \text{ et } \nabla \Phi \in L^2(\mathbb{R}^3 \setminus \widehat{\mathcal{O}}_j^\delta) \right\}.$$

(ii) Par (HR),  $F = -\kappa^2 \Pi_{k-1}^{(j)} - \Delta \mathbf{U}_{k+1,k+1}^{(j)} \in \text{BL}'$  car :

$$F = \kappa^2 \left( \mathbf{U}_{k+1,k-1}^{(j)}(R, \Theta) - \Pi_{k-1}^{(j)}(R, \Theta) \right) = \underset{R \rightarrow +\infty}{O} \left( \frac{1}{R^3} \right).$$

(iii) Conclusion avec le lemme de **Lax-Milgram**.

## Théorème (Existence du développement à tout ordre)

Supposons que

$$\alpha_j^\delta = \frac{\gamma_j}{\delta}, \quad \text{Im } \gamma_j < 0.$$

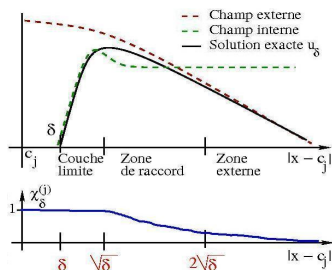
Alors, pour tout  $k \geq 1$ , les couples  $(u_k, \Pi_k^{(j)})$  vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Champs externes : } \left\{ \begin{array}{l} (\Delta + \kappa^2)u_k(x) = 0 \quad \mathbb{R}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^N \{c_j\}, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - i\kappa) u_k = 0. \end{array} \right. \\ \\ \text{Champs internes : } \left\{ \begin{array}{l} \Delta \Pi_k^{(j)} = -\kappa^2 \Pi_{k-2}^{(j)} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \widehat{\mathcal{O}}_j, \\ \partial_R \Pi_k^{(j)} = \gamma_j \Pi_k^{(j)} \quad \text{sur } \partial \widehat{\mathcal{O}}_j. \end{array} \right. \\ \\ \text{Raccord : } \left\{ \begin{array}{l} u_{k,\delta}(c_j + \delta R\Theta) := \sum_{l=0}^k \delta^l u_l(c_j + \delta R\Theta) \\ \quad = \sum_{l=0}^k \delta^l \mathbf{u}_{k,l}^{(j)}(R, \Theta) + \underset{\delta \rightarrow 0}{o}(\delta^k), \\ \mathbf{u}_{k,l}^{(j)} - \Pi_l^{(j)} = \underset{R \rightarrow +\infty}{o}(R^{l-k}). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

*existent de manière unique.*

## Approximation globalement valide de $u_\delta$ :

$$\tilde{u}_{m,\delta}(x) = \left(1 - \sum_{j=1}^N \chi_\delta^{(j)}(x)\right) \sum_{k=0}^m \delta^k u_k(x) + \sum_{j=1}^N \chi_\delta^{(j)}(x) \sum_{k=0}^m \delta^k \Pi_k^{(j)}\left(\frac{x - c_j}{\delta}\right).$$



## Théorème (Estimation d'erreur dans la zone externe)

Soit  $\mathcal{F}_\rho^{r_0} = B_0^{r_0} \setminus \bigcup_{j=1}^N \mathcal{O}_j^\rho$  avec  $\rho > 0$  tel que  $\mathcal{O}_j^\delta \subset \mathcal{B}_j^\rho$ . Alors,  $\forall r_0$  assez grand :

$$\|u_\delta - \tilde{u}_{m,\delta}\|_{H^1(\mathcal{F}_\rho^{r_0})} \leq C_{\rho,r_0,N} \delta^{m+1}$$

(i) Soit  $\mathbf{e}_{\delta,m} = u_\delta - \tilde{u}_{m,\delta}$  l'erreur. Sur  $\mathcal{F}_\delta^{r_0} = B_0^{r_0} \setminus \bigcup_{j=1}^N \mathcal{O}_j^\delta$ , elle vérifie :

$$\begin{cases} (\Delta + \kappa^2)\mathbf{e}_{\delta,m} & = (\Delta + \kappa^2)\tilde{u}_{m,\delta} = \mathbf{f}_{m,\delta} & \text{dans } \mathcal{F}_\delta^{r_0}, \\ \partial_{\mathbf{n}_j}\mathbf{e}_{\delta,m} & = \alpha_j^\delta \mathbf{e}_{\delta,m} & \text{sur } \mathcal{S}_j^\delta, \\ \partial_\nu \mathbf{e}_{\delta,m} + \text{Dtn}[\mathbf{e}_{\delta,m}] & = 0 & \text{sur } \partial B_0^{r_0}. \end{cases}$$

(i) Soit  $\mathbf{e}_{\delta,m} = u_\delta - \tilde{u}_{m,\delta}$  l'erreur. Sur  $\mathcal{F}_\delta^{r_0} = B_0^{r_0} \setminus \bigcup_{j=1}^N \mathcal{O}_j^\delta$ , elle vérifie :

$$\begin{cases} (\Delta + \kappa^2)\mathbf{e}_{\delta,m} & = (\Delta + \kappa^2)\tilde{u}_{m,\delta} = \mathbf{f}_{m,\delta} & \text{dans } \mathcal{F}_\delta^{r_0}, \\ \partial_{n_j}\mathbf{e}_{\delta,m} & = \alpha_j^\delta \mathbf{e}_{\delta,m} & \text{sur } \mathcal{S}_j^\delta, \\ \partial_\nu \mathbf{e}_{\delta,m} + \text{Dtn}[\mathbf{e}_{\delta,m}] & = 0 & \text{sur } \partial B_0^{r_0}. \end{cases}$$

(ii) Estimation de stabilité **uniforme en  $\delta$**  :

$$\|\mathbf{e}_{m,\delta}\|_{H^1(\mathcal{F}_\delta^{r_0})} \leq C \|\mathbf{f}_{m,\delta}\|_{L^2(\mathcal{F}_\delta^{r_0})}, \quad C > 0.$$

- Raisonnement par l'absurde.
- Extension uniforme de la solution à l'intérieur des  $\mathcal{B}_j^\delta$  (Maz'ya).

(iii) Estimation de  $\mathbf{f}_{m,\delta}$  :

$$\|\mathbf{f}_{m,\delta}\|_{L^2(\mathcal{F}_\delta^{r_0})} = \underset{\delta \rightarrow 0}{O}(\delta^{m/2+1/4}).$$

- $\mathbf{f}_{m,\delta} =$  Erreur **interne** + Erreur de **raccord**.



(i) Soit  $\mathbf{e}_{\delta,m} = u_\delta - \tilde{u}_{m,\delta}$  l'erreur. Sur  $\mathcal{F}_\delta^{r_0} = B_0^{r_0} \setminus \bigcup_{j=1}^N \mathcal{O}_j^\delta$ , elle vérifie :

$$\begin{cases} (\Delta + \kappa^2)\mathbf{e}_{\delta,m} & = (\Delta + \kappa^2)\tilde{u}_{m,\delta} = \mathbf{f}_{m,\delta} & \text{dans } \mathcal{F}_\delta^{r_0}, \\ \partial_{n_j}\mathbf{e}_{\delta,m} & = \alpha_j^\delta \mathbf{e}_{\delta,m} & \text{sur } \mathcal{S}_j^\delta, \\ \partial_\nu \mathbf{e}_{\delta,m} + \text{Dtn}[\mathbf{e}_{\delta,m}] & = 0 & \text{sur } \partial B_0^{r_0}. \end{cases}$$

(ii) Estimation de stabilité **uniforme en  $\delta$**  :

$$\|\mathbf{e}_{m,\delta}\|_{H^1(\mathcal{F}_\delta^{r_0})} \leq C \|\mathbf{f}_{m,\delta}\|_{L^2(\mathcal{F}_\delta^{r_0})}, \quad C > 0.$$

- Raisonnement par l'absurde.
- Extension uniforme de la solution à l'intérieur des  $\mathcal{B}_j^\delta$  (Maz'ya).

(iii) Estimation de  $\mathbf{f}_{m,\delta}$  :

$$\|\mathbf{f}_{m,\delta}\|_{L^2(\mathcal{F}_\delta^{r_0})} = \underset{\delta \rightarrow 0}{O}(\delta^{m/2+1/4}).$$

- $\mathbf{f}_{m,\delta}$  = Erreur **interne** + Erreur de **raccord**.

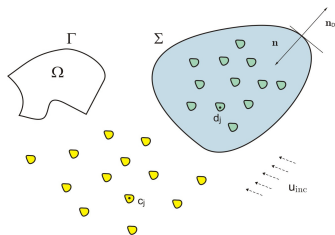
(iv) Estimation sur  $\mathcal{F}_\rho^{r_0} = B_0^{r_0} \setminus \bigcup_{j=1}^N \mathcal{O}_j^\rho$  avec  $\rho > 0$  tel que  $\mathcal{O}_j^\delta \subset \mathcal{O}_j^\rho$  :

$$\|u_\delta - \tilde{u}_{m,\delta}\|_{H^1(\mathcal{F}_\rho^{r_0})} \leq \|u_\delta - \tilde{u}_{d,\delta}\|_{H^1(\mathcal{F}_\rho^{r_0})} + \sum_{l=m+1}^d \delta^l \|u_l\|_{H^1(\mathcal{F}_\rho^{r_0})} \leq C_{\rho,r_0,N} \delta^{m+1},$$

où  $d \in \mathbb{N}$  tel que  $d \geq m$  et  $d/2 + 1/4 \geq (m+1)$ .

- 1 Introduction du contexte
  
- 2 Analyse asymptotique du problème de diffraction multiple
  - Un problème de diffraction multiple simplifié
  - Extensions à des problèmes de diffraction plus généraux
  
- 3 Justification du modèle de Foldy-Lax étendu
  
- 4 Perspectives

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta + \kappa^2)u_\delta(x) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \left( \bigcup_{j=1}^N \overline{\mathcal{O}_j^\delta} \cup \overline{\Omega} \cup \overline{D} \right), \\ (\Delta + \kappa_D^2)v_\delta(x) = 0 \text{ dans } D \setminus \bigcup_{j=1}^N \overline{\mathcal{U}_j^\delta}, \\ \mathcal{S}_{\mathcal{O}_j^\delta} u_\delta = 0 \quad (j = 1, \dots, N), \\ \mathcal{S}_{\mathcal{U}_j^\delta} v_\delta = 0 \quad (j = 1, \dots, M), \\ \mathcal{S}_\Omega u_\delta = 0, \\ (\partial_{|x|} - i\kappa) [u_\delta - u_{\text{inc}}] = \underset{|x| \rightarrow \infty}{\mathcal{O}} \left( \frac{1}{|x|} \right), \\ \text{Conditions de transmission pour } (u_\delta, v_\delta) \text{ sur } \Sigma. \end{array} \right.$$



- $\mathcal{S} = \partial_{\mathbf{n}} - \alpha_\delta$ ,
- $\mathcal{S} =$  conditions de transmission.
- $\mathcal{S} =$  **opérateurs linéaires** pour lesquels le problème est **bien-posé**.

Figure: Géométrie du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta + \kappa^2)u_k(x) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \left( \bigcup_{j=1}^N \{c_j\} \cup \bar{\Omega} \cup \bar{D} \right), \\ (\Delta + \kappa_D^2)v_k(x) = 0 \text{ dans } D \setminus \bigcup_{j=1}^N \{d_j\}, \\ \mathcal{S}_\Omega u_k = 0, \\ \text{Conditions de transmission sur } \Sigma, \\ \text{Conditions de radiation pour } u_k - u_{\text{inc}} \delta_0^k, \end{array} \right.$$

## Théorème

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_k = w_k + z_k \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \left( \bigcup_{j=1}^N \{c_j\} \cup \bar{\Omega} \cup \bar{D} \right), \\ v_k = \omega_k + \zeta_k \text{ dans } D \setminus \bigcup_{j=1}^N \{d_j\}. \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} z_k(x) = \sum_{j=1}^N \sum_{n \geq 0} h_n^{(1)}(\kappa |x - c_j|) Y_{n,k}^{(j)} \left( \frac{x - c_j}{|x - c_j|} \right), \\ \zeta_k(x) = \sum_{j=1}^M \sum_{n \geq 0} h_n^{(1)}(\kappa_D |x - d_j|) Y_{n,k}^{(j)} \left( \frac{x - d_j}{|x - d_j|} \right), \end{array} \right.$$

et  $w_k, \omega_k$  sont  $\mathcal{C}^\infty$  et sont **déterminées par  $z_k, \zeta_k$** .

- Existence et unicité des champs externes  $\rightarrow$  Démonstrations **similaires** !

## Problèmes des champs internes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \Pi_k^{(j)} = -\kappa^2 \Pi_{k-2}^{(j)} \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \widehat{\mathcal{O}}_j^\delta, \\ \widehat{\mathcal{S}}_{\mathcal{O}_j^\delta} \Pi_k^{(j)} = F[\Pi_{l < k}^{(j)}], \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \Phi_k^{(j)} = -\kappa_D^2 \Phi_{k-2}^{(j)} \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \widehat{\mathcal{U}}_j^\delta, \\ \widehat{\mathcal{S}}_{\mathcal{U}_j^\delta} \Phi_k^{(j)} = G[\Phi_{l < k}^{(j)}], \end{array} \right.$$

## Remarques :

- $F, G$  sont **linéaires** et peuvent être nuls.
- $\widehat{\mathcal{S}}_{\mathcal{O}_j^\delta} \varphi(X) = \mathcal{S}_{\mathcal{O}_j^\delta} \varphi\left(\frac{x - c_j}{\delta}\right)$ .
- Existence et unicité des champs internes  $\rightarrow$  Démonstrations **similaires** (Espace de Beppo-Levi)!

Estimations d'erreurs : Même ordre + **mêmes démonstrations**.

- 1 Introduction du contexte
  
- 2 Analyse asymptotique du problème de diffraction multiple
  - Un problème de diffraction multiple simplifié
  - Extensions à des problèmes de diffraction plus généraux
  
- 3 Justification du modèle de Foldy-Lax étendu
  
  
- 4 Perspectives

Approximation de Foldy-Lax étendue : Cas  $D = \emptyset$ .

$$u_{\delta}^{\text{FL}} = u_{\text{inc}} + z_{\Omega} + \sum_{j=1}^N A_j \frac{\exp(i\kappa|x-c_j|)}{4\pi|x-c_j|} \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \left( \bigcup_{j=1}^N \overline{\mathcal{O}_j^{\delta}} \cup \overline{\Omega} \right).$$

Modèle de Foldy-Lax étendue :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\ell}^{-1} A_{\ell} - \sum_{j \neq \ell} \frac{\exp(i\kappa|c_{\ell}-c_j|)}{4\pi|c_{\ell}-c_j|} A_j = u_{\text{inc}}(c_{\ell}) + z_{\Omega}(c_{\ell}) \quad (\ell = 1, \dots, N), \\ \Delta z_{\Omega} + \kappa^2 z_{\Omega} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega \cup D}, \\ \left( z_{\Omega} + \sum_{j=1}^N A_j \frac{\exp(i\kappa|x-c_j|)}{4\pi|x-c_j|} \right) = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ (\partial_{|x|} - i\kappa) z_{\Omega} = \underset{|x| \rightarrow \infty}{\mathcal{O}} \left( \frac{1}{|x|} \right). \end{array} \right.$$

Approximation de Foldy-Lax étendue : Cas  $D = \emptyset$ .

$$u_{\delta}^{\text{FL}} = u_{\text{inc}} + z_{\Omega} + \sum_{j=1}^N A_j \frac{\exp(i\kappa|x-c_j|)}{4\pi|x-c_j|} \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \left( \bigcup_{j=1}^N \overline{\mathcal{O}_j^{\delta}} \cup \overline{\Omega} \right).$$

Modèle de Foldy-Lax étendue :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\ell}^{-1} A_{\ell} - \sum_{j \neq \ell} \frac{\exp(i\kappa|c_{\ell}-c_j|)}{4\pi|c_{\ell}-c_j|} A_j = u_{\text{inc}}(c_{\ell}) + z_{\Omega}(c_{\ell}) \quad (\ell = 1, \dots, N), \\ \Delta z_{\Omega} + \kappa^2 z_{\Omega} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega \cup D}, \\ \left( z_{\Omega} + \sum_{j=1}^N A_j \frac{\exp(i\kappa|x-c_j|)}{4\pi|x-c_j|} \right) = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ (\partial_{|x|} - i\kappa) z_{\Omega} = \underset{|x| \rightarrow \infty}{\mathcal{O}} \left( \frac{1}{|x|} \right). \end{array} \right.$$

## Objectif :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|u_{\delta} - u_{\delta}^{\text{FL}}\| = 0.$$



Champs externe d'ordre 1 : Pour  $x \in B_0^{r_0} \setminus \bigcup_{j=1}^N \mathcal{O}_j^p \cup \bar{\Omega}$ , on a :

$$u_\delta(x) = u_{\delta,1}(x) + \underset{\delta \rightarrow 0}{O}(\delta^2),$$

$$u_{\delta,1}(x) = u_{\text{inc}}(x) + w_0(x) + \delta \left( w_1(x) + \sum_{j=1}^N Y_0^{(j)} h_0(\kappa|x - c_j|) \right).$$

→ Approximation de  $u_\delta$  **similaire** à  $u_\delta^{\text{FL}}$ .

→ On va les comparer  $\tilde{A}_j = \delta 4\pi Y_0^{(j)}$ ,  $\tilde{z}_\Omega = w_0(x) + \delta w_1(x)$  à  $A_j$  et  $z_\Omega$ .

## Théorème

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| u_\delta - u_\delta^{\text{FL}} \right\|_{H^1(B_0^{r_0} \setminus \cup_{j=1}^N \mathcal{O}_j^p \cup \bar{\Omega})} = 0.$$

### Démonstration :

- Par le **ystème** vérifié par  $A_j$ , on a :

$$|A_j - \tilde{A}_j| = \mathcal{O}_{\delta \rightarrow 0}(\delta^2).$$

- Par **définition** de  $z_\Omega$  + résultat de **stabilité** :

$$\|z_\Omega - \tilde{z}_\Omega\|_{H^1(B_0^{r_0} \setminus \cup_{j=1}^N \mathcal{O}_j^p \cup \bar{\Omega})} = \mathcal{O}_{\delta \rightarrow 0}(\delta^2).$$

$$\rightarrow \|u_{\delta,1} - u_\delta^{\text{FL}}\|_{H^1(B_0^{r_0} \setminus \cup_{j=1}^N \mathcal{O}_j^p \cup \bar{\Omega})} \rightarrow 0.$$

- Fin par inégalité triangulaire.

- 1 Introduction du contexte
  
- 2 Analyse asymptotique du problème de diffraction multiple
  - Un problème de diffraction multiple simplifié
  - Extensions à des problèmes de diffraction plus généraux
  
- 3 Justification du modèle de Foldy-Lax étendu
  
- 4 Perspectives

## Suites de ces travaux :

- (i) Petits obstacles inclus dans un milieu inhomogène ( $\kappa_D = \kappa_D(x)$ ).  
→ Pas de formule de représentation pour les champs externes.
  
- (ii) Modèle de Foldy-Lax pour les ondes électromagnétiques.  
→ Equations de Maxwell = problème vectoriel.  
→ Pas de compacité naturelle donc résultat de stabilité uniforme difficile.

Merci de votre attention.