

RÉALISATION DE MÉTAMATÉRIAUX ACOUSTIQUES PAR HOMOGÉNÉISATION NON PÉRIODIQUE ET DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES RACCORDÉS

Pierre-Henri COCQUET^{a,b}, Abderrahmane BENDALI^b et Sébastien TORDEUX^c

(a) ONERA-Toulouse, DTIM/M2SN, 2 avenue E.-Belin, BP 4025, 31055 Toulouse cedex.

(b) IMT, Université Toulouse-3, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex.

(c) INRIA Bordeaux Sud-Ouest et LMA - UMR CNRS 5142, Université de Pau et des Pays de l'Adour.

Position du problème

Problème de diffraction par N hétérogénéités:

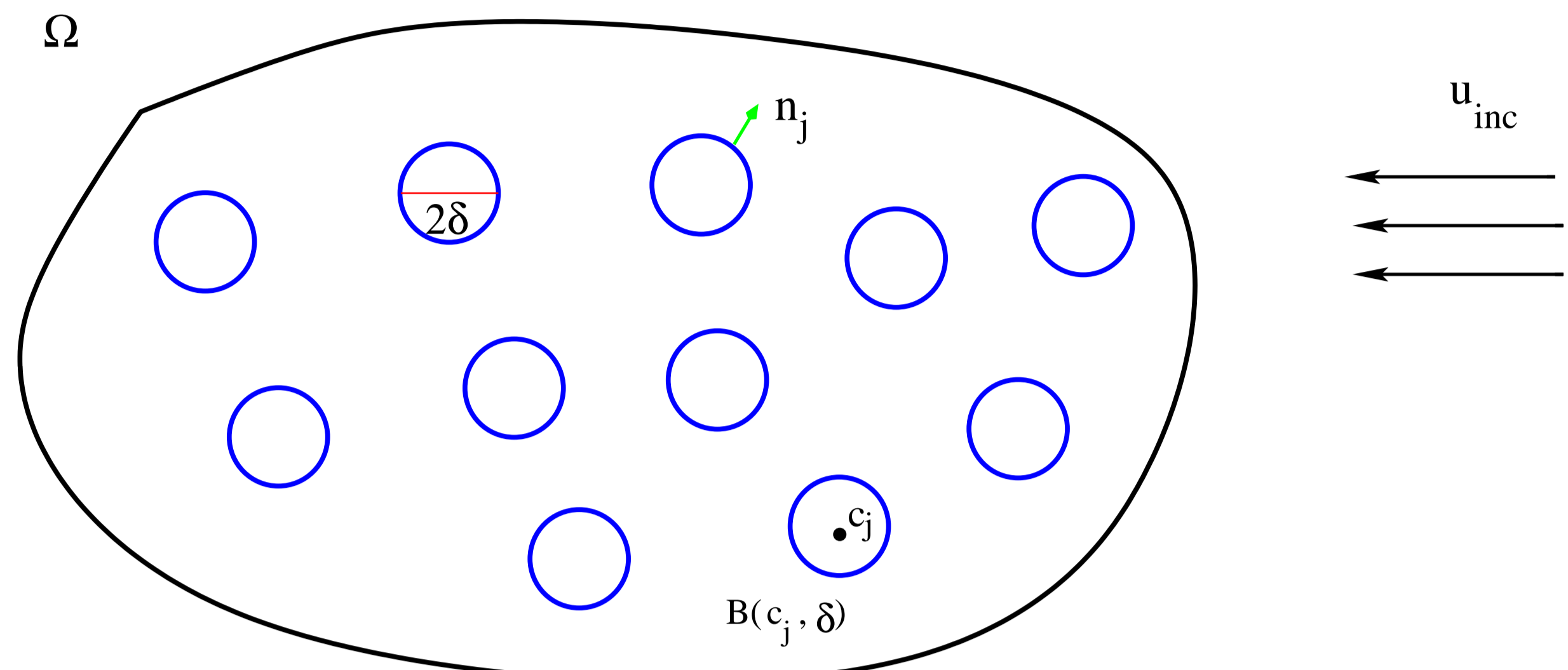
$$\begin{cases} (\Delta + \kappa^2)u_\delta(x) = 0, \mathbb{R}^3 \setminus \cup_{j=1}^N \mathcal{B}(c_j, \delta), \\ \partial_{n_j} u_\delta = \alpha_j(\delta)u_\delta, \mathcal{S}^2(c_j, \delta), \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - i\kappa) [u_\delta - u_{\text{inc}}] = 0. \end{cases}$$

- $\mathcal{B}(c_j, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x - c_j| < \delta\}$,
- $u_{\text{inc}}(x) = e^{i\kappa \langle x, d \rangle}$ est une onde plane,
- n_j = normale unitaire sortante à $\mathcal{B}(c_j, \delta)$,
- $\alpha_j(\delta)$ est l'impédance acoustique caractérisant $\mathcal{B}(c_j, \delta)$.

But de l'étude

- Caractériser le milieu obtenu lorsque $\delta \rightarrow 0$.
- Savoir s'il existe des α_j et des répartitions R permettant d'obtenir des **métamatériaux**.

Géométrie du problème



Hypothèse sur la répartition des hétérogénéités

Considérons $R : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que pour tout cube $\Theta \subset \Omega$ on ait [2]:

$$\mathcal{N}(\Theta) = \text{Card} \{k \in \{1, \dots, N\} \mid \mathcal{B}_k \subset \Theta\} = \left(\frac{1}{\delta} \int_{\Theta} R(y) dy \right) (1 + o_{\delta \rightarrow 0}(1)).$$

- Cas périodique de période $\delta^{1/3}$ obtenu lorsque $R = 1$.
- $N = \mathcal{N}(\Omega) = O\left(\frac{1}{\delta}\right)$

Developpements asymptotiques raccordés

On postule les Anzats suivants:

Champs lointains: Pour $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \cup_{j=1}^N \{c_j\}$,

$$u_\delta(x) = \sum_{k=0}^m \delta^k u_k(x) + o(\delta^m).$$

Champs proches: Pour $j = 1, \dots, N$, on "zoom" au voisinage d'un $\mathcal{B}(c_j, \delta)$ via les variables rapides

$$(R_j, \Theta_j) = \left(\frac{|x - c_j|}{\delta}, \frac{x - c_j}{|x - c_j|} \right),$$

$$\Pi_\delta^{(j)}(X_j) = u_\delta \left(\frac{x - c_j}{\delta} \right) = \sum_{k=0}^m \delta^k \Pi_k^{(j)}(R_j, \Theta_j) + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta^m)$$

Le processus de raccord [1] permet de déterminer le champ lointain rayonné par toutes les hétérogénéités et ainsi l'indice de réfraction caractérisant le matériau homogénéisé.

Calculs des premiers termes et passage à la limite

Champs lointains: Ils vérifient
$$\begin{cases} (\Delta + \kappa^2)u_k(x) = 0, \mathbb{R}^3 \setminus \cup_{j=1}^N \{c_j\}, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - i\kappa) [u_\delta - \delta_0^k u_{\text{inc}}] = 0. \end{cases}$$

Champs proches: Ils vérifient
$$\begin{cases} \Delta \Pi_k^{(j)}(R_j, \Theta_j) = -\kappa^2 \Pi_{k-2}^{(j)}(R_j, \Theta_j), \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{B}(c_j, 1), \\ \partial_{R_j} \Pi_k^{(j)} = \delta \alpha_j(\delta) \Pi_k^{(j)}. \end{cases}$$

Les solutions explicites ainsi que les conditions de raccords [1] permettent de montrer que le developpement à l'ordre 1 du champ lointain vérifie:

$$u_\delta(x) = u_{\text{inc}}(x) + \delta \frac{\kappa}{i} \sum_{j=1}^N u_{\text{inc}}(c_j) h_0(\kappa|x - c_j|) \frac{v_j}{1 + v_j} + o_{\delta \rightarrow 0}(\delta)$$

où $v_j = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \alpha_j(\delta)$.

En prenant ensuite en compte la répartition des hétérogénéités et en faisant tendre δ vers 0, on obtient:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} u_\delta(x) = u_0(x) = u_{\text{inc}}(x) + \frac{\kappa}{i} \int_{\Omega} u_{\text{inc}}(y) \frac{v(y)R(y)}{1 + v(y)} h_0^{(1)}(\kappa|x - y|) dy,$$

où $v(c_j) = v_j$.

Approximation de Born

Soit n_0 tel que $(1 - n_0^2) \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ et \tilde{u} solution de

$$\begin{cases} (\Delta + \kappa^2 n_0^2(x)) \tilde{u}(x) = 0, \mathbb{R}^3, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x| (\partial_{|x|} - i\kappa) [\tilde{u} - u_{\text{inc}}] = 0. \end{cases}$$

Alors $\tilde{u}(x) = u_{\text{inc}}(x) + \mathbf{K}[\tilde{u}](x)$, où

$$\mathbf{K}[v](x) = \frac{\kappa}{4\pi i} \int_{\Omega} h_0^{(1)}(\kappa|x - y|) (1 - n_0^2(y)) v(y) dy.$$

Approximation de Born:

$$\tilde{u}(x) = u_{\text{inc}}(x) + \mathbf{K}[u_{\text{inc}}](x).$$

Coefficient homogénéisé, conclusion et perspectives

- En comparant le champ lointain avec l'approximation de Born, on obtient que l'indice du matériau homogénéisé est donné par:

$$n_{\text{hom}}(x)^2 = 1 - \frac{4\pi R(x)v(x)}{\kappa^2(1 + v(x))}, \quad x \in \Omega.$$

- C'est le même indice que celui obtenu par A.G. Ramm [2].
- **Métamatériaux** peuvent être obtenus avec cette méthode par exemple lorsque $R = 1$ et $\alpha_j \rightarrow +\infty$ (conditions limite de Dirichlet).
- Extension aux équations de Maxwell en cours.

Références

- [1] Joly, P. and Tordeux, S., Matching of asymptotic expansions for wave propagation in media with thin slots I: The asymptotic expansion, Multiscale Modeling and Simulation, vol. 5, 2007.
- [2] Ramm A.G., A recipe for making materials with negative refraction in acoustics, Physics Letters A, 2007.