

Un schéma numérique pour l'approximation de métamatériaux acoustiques

Pierre-Henri COCQUET⁽¹⁾, Vincent MOUYSSET⁽²⁾.

(1) Université de Genève, Section de Mathématiques.

(2) ONERA, Toulouse DTIM/M2SN.

Pierre-Henri.Cocquet@unige.ch

Résumé

Les métamatériaux sont des milieux homogénéisés dont le comportement physique diffère de celui des matériaux naturels. Ils possèdent, par exemple, des indices de permittivité et/ou de perméabilité de parties réelles négatives. Leurs applications sont nombreuses et les principales sont la super-lentille et la cape d'invisibilité. Les changements de signe entraînent cependant que les méthodes usuelles ne s'appliquent plus. Dans ce poster, nous abordons ainsi la question de la modélisation des métamatériaux à travers l'existence et l'unicité de solution pour un système en présence de métamatériaux homogénéisés. Nous présentons ensuite un schéma numérique de type éléments finis qui converge dès que le problème continu est bien-posé.

1. Contexte: Propagation d'ondes dans les métamatériaux

Définition: Milieux **homogénéisés** dont le comportement physique **diffère** de celui des **matériaux naturels**.

Exemple: Indices de permittivité, de perméabilité de **parties réelles négatives**.

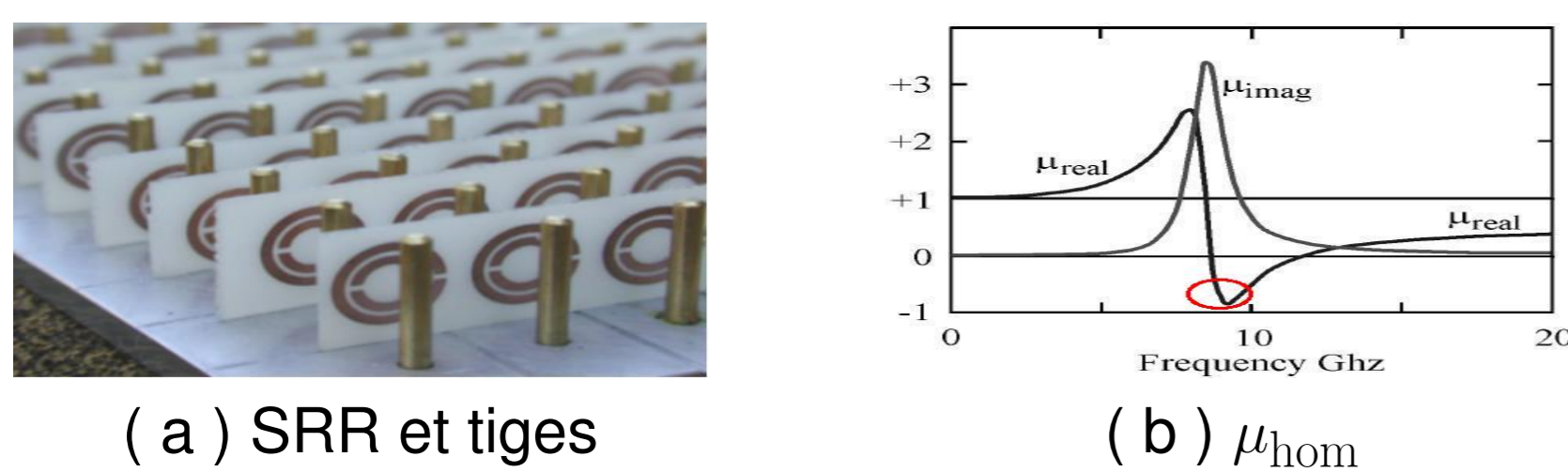


Figure 1: Milieu à perméabilité négative [6]

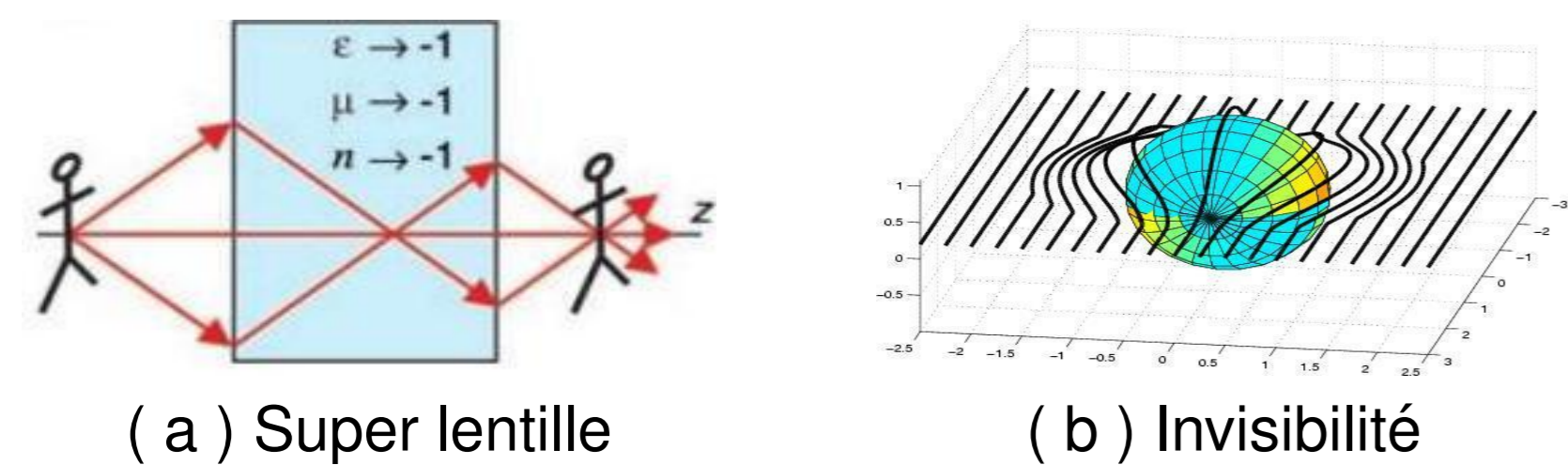


Figure 2: Exemples d'application des métamatériaux [6]

2. Motivations et difficultés

Motivations:

- 1) Modélisation des métamatériaux: Sens des milieux à **indices négatifs**?
- 2) Simulation numérique.

Problème modèle: Métamatériaux **bornés** à indices négatifs.

Difficultés:

- 1) Mathématiques: **Méthodes usuelles** ne s'appliquent plus.
- 2) Numériques: Quels schémas? **Convergence**?

3. Etat de l'art

1) 2005, P. Fernandes et al. [3]: Conditions sur les ε, μ du métamatériau permettant d'utiliser **Lax-Milgram**.

- Eq. de Maxwell à l'**ordre 2** bien-posées.
- **Convergence** des EF avec éléments de Nédelec.

2) 2010, A.S. Bonnet-Bendhia et al. [4]: **T-coercivité** pour problèmes de transmissions d'**ordre 2** entre milieux classiques et métamatériaux.

- Problèmes bien-posés **au sens de Fredholm**.
- Injectivité pour certaines géométries d'interfaces.
- Nouvelles méthodes numériques de type EF.

Question:

- Étude de systèmes de propagations d'ondes d'**ordre 1**?

4. Système de l'acoustique

Problème d'étude: Propagation d'ondes acoustiques.

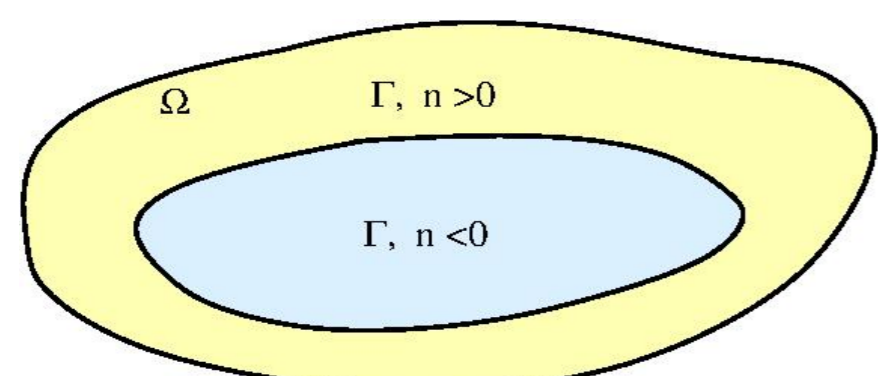


Figure 3: Géométrie de travail

Système de l'acoustique en régime harmonique:

$$\text{Trouver } (u, \rho) \in H(\text{div}, \Omega) \times H^1(\Omega), \begin{cases} i\omega\Gamma(x)u - \nabla\rho = f & x \in \Omega, \\ i\omega n(x)\rho - \text{div} u = g & x \in \Omega, \\ \rho = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

- Ω : Ouvert **borné** de \mathbb{R}^3 de classe C^1 .
- (u, ρ) : **Champs** de vitesse/pression.
- (f, g) : Termes **source**.
- (Γ, n) : Module de **masse**/indice de **réfraction**.

Système sous forme compacte:

$$\text{Trouver } U = (u, \rho) \in \mathcal{D}(\mathbb{W}), \quad (K(i\omega, x) + \mathbb{W})U = F, \quad x \in \Omega.$$

Théorème 1.

Si $K(i\omega, \cdot)$ est **coercif** alors le système de l'acoustique est **bien-posé**.

Problème En présence de métamatériaux: $K(i\omega, \cdot)$ n'est plus **coercif**.

5. Hypothèses sur le métamatériau

Observations de V.G. Veselago [5]:

- 1) Γ et n dépendent de ω comme des **fractions rationnelles**.
→ $p = i\omega + \eta \mapsto (\Gamma(p, \cdot), n(p, \cdot))$ sont **méromorphes**.
- 2) Le métamatériau est un **milieu classique** pour au moins un ω .
→ $\exists p_0$ tel que $K(p_0, \cdot)$ est **coercif**.

Confirmation: Réseau périodique de tubes troués

$$\begin{cases} \Gamma(p, x) = 1.21, \\ n(p, x) = B^{-1} \left(1 - \frac{\omega_{sh}^2}{\gamma p - p^2} \right), \\ B, \omega_{sh}, \gamma > 0. \end{cases}$$

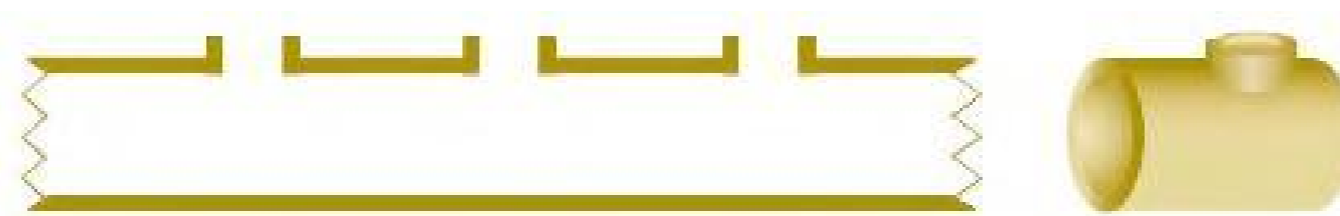


Figure 4: Réseau de tubes troués [7]

Remarque: Système **bien posé** pour $p = p_0$.

6. Résultat obtenu

Théorème 1. [2]

Supposons que:

- (A1) $p \in D_0 \subset \mathbb{C} \mapsto (\Gamma, n)(p, x)$ sont **holomorphes** p.p. $x \in \Omega$.
- (A2) $\exists p_0 \in D_0$ tels que $p_0\Gamma(p_0, \cdot)$ et $p_0n(p_0, \cdot)$ sont **coercifs**.
- (A3) $(\Gamma(p, \cdot), n(p, \cdot)) \in \mathcal{L}ip(\Omega, \mathbb{C}^*) \times L^\infty(\Omega) \forall (p, x) \in D_0 \times \Omega$.

Alors, pour tout $F \in L^2(\Omega)^4$, le problème est **bien-posé** pour tout $p \in D_0 \setminus S$, où $S \subset D_0$ est un **ensemble discret**.

Application: Réseau de tubes troués [7].

7. Un schéma pour l'approximation des métamatériaux

- **Idée** du schéma issue de [1].
- **Formulation variationnelle:** $\forall \psi_h \in (K(p, x) + \mathbb{W})\mathcal{V}_h$,

$$\text{Trouver } U_h = (u_h, \rho_h) \in \mathcal{V}_h \subset \mathcal{D}(\mathbb{W}) : \int_{\Omega} \langle (K(p, x) + \mathbb{W})U_h, \overline{\psi}_h \rangle dx = \int_{\Omega} \langle f, \overline{\psi}_h \rangle dx.$$

Théorème 1.

Supposons que:

- (i) $\dim(\mathcal{V}_h) < +\infty$ et $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{D}(\mathbb{W})$.
- (ii) $\forall U \in \mathcal{D}(\mathbb{W}), \exists \tilde{U}_h \in \mathcal{V}_h, \lim_{h \rightarrow 0} \|U - \tilde{U}_h\|_{\mathcal{D}(\mathbb{W})} = 0$.
- (iii) $K(p, x)$ vérifie (A1), (A2), (A3).

Alors le problème discret est **bien-posé** pour tout $p \in D_0 \setminus S$ et:

$$\|U - U_h\|_{L^2(\Omega)^4} \leq C \inf_{V_h \in \mathcal{V}_h} \|U - V_h\|_{\mathcal{D}(\mathbb{W})}, \quad C > 0.$$

8. Validations numériques:

Second membre: $F = (K + \mathbb{W})U_{\text{ex}}$.

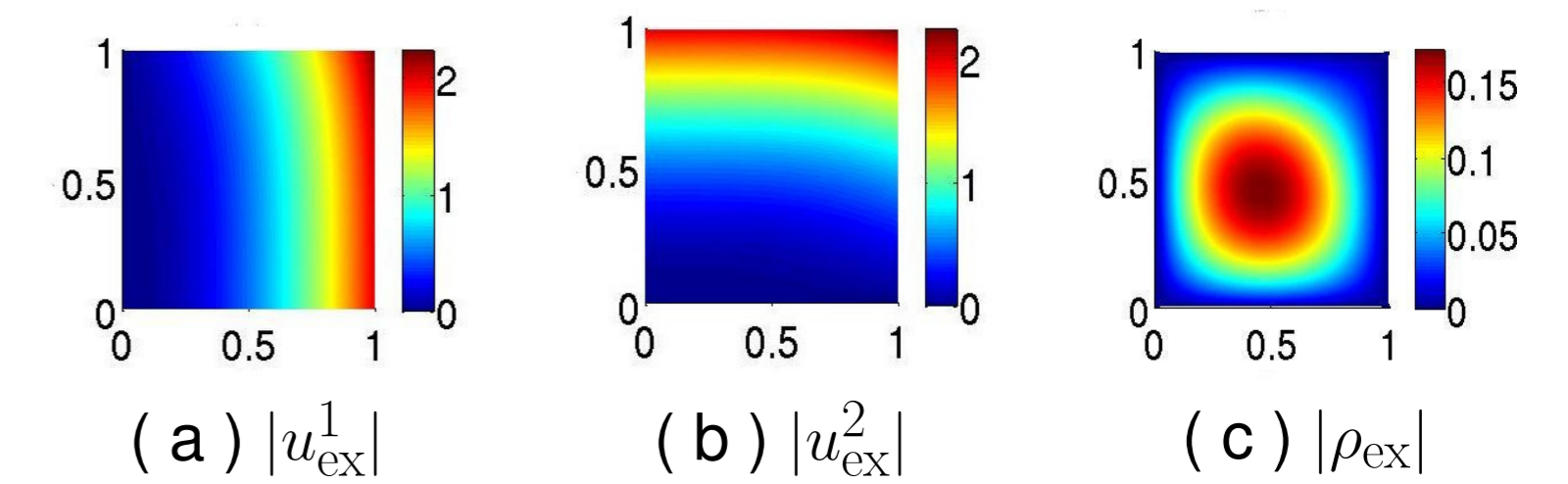


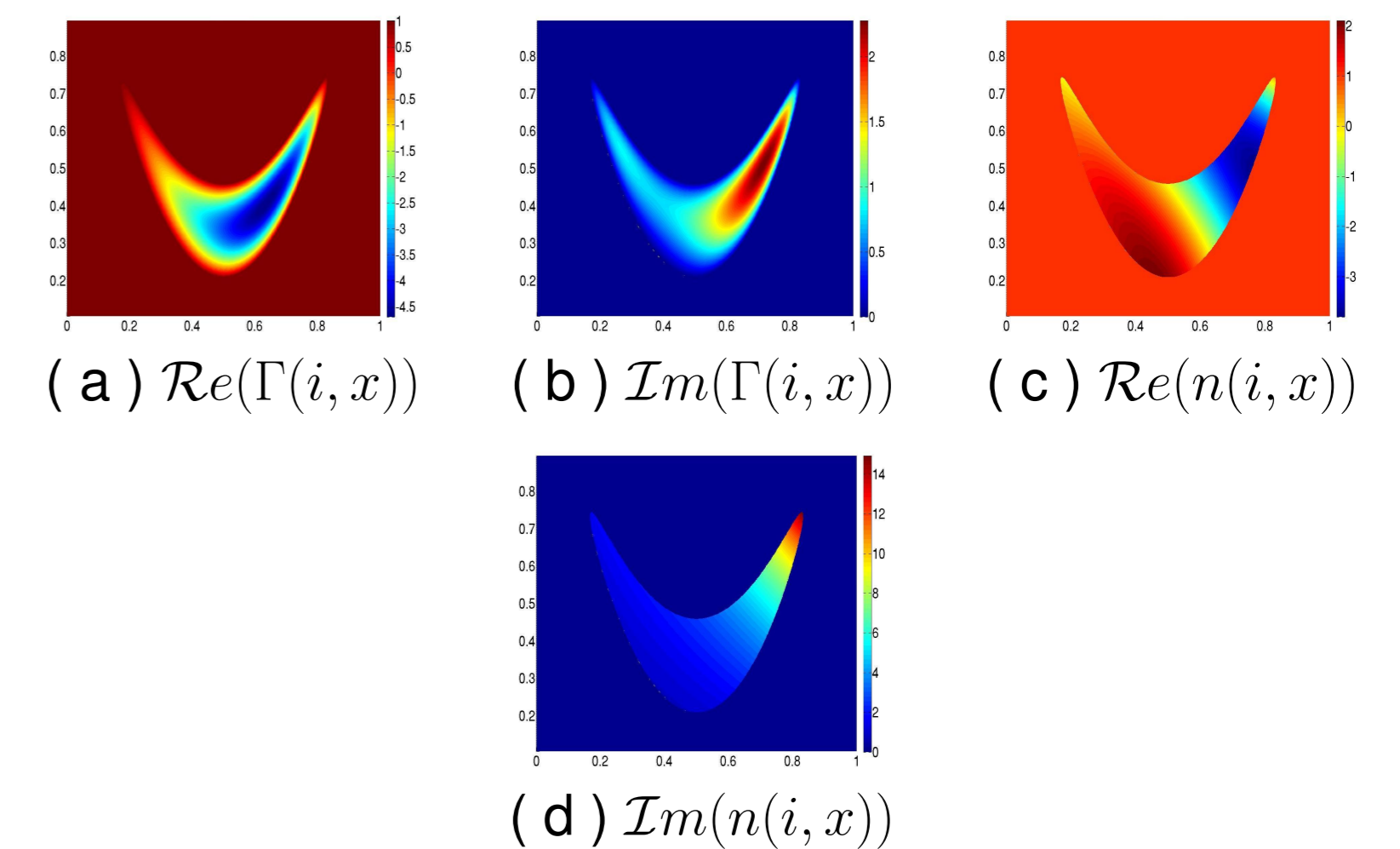
Figure 5: Module solution exacte.

Espace d'approximation:

$$\mathcal{V}_h = \{\text{Raviart-Thomas}\} \times \{\mathbb{P}^1 + (\text{C.L. de Dirichlet} : \lambda = 0)\}$$

$$U_h = \begin{matrix} u_h & \rho_h \end{matrix}$$

Paramètres du métamatériau:



Remarque: $K(p, x)$ vérifie (A1), (A2), (A3)

→ Schéma **convergent** en $O(h)$.

Résultats numériques:

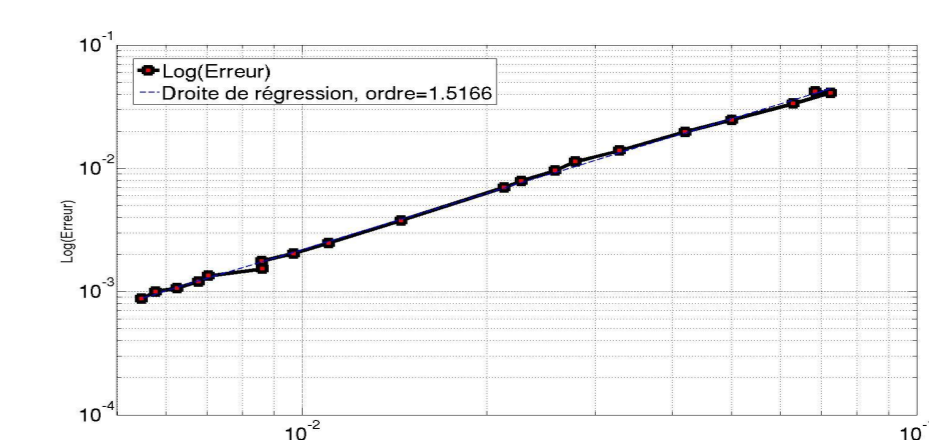


Figure 7: $\|U - U_h\|_{L^2(\Omega)^3}$.

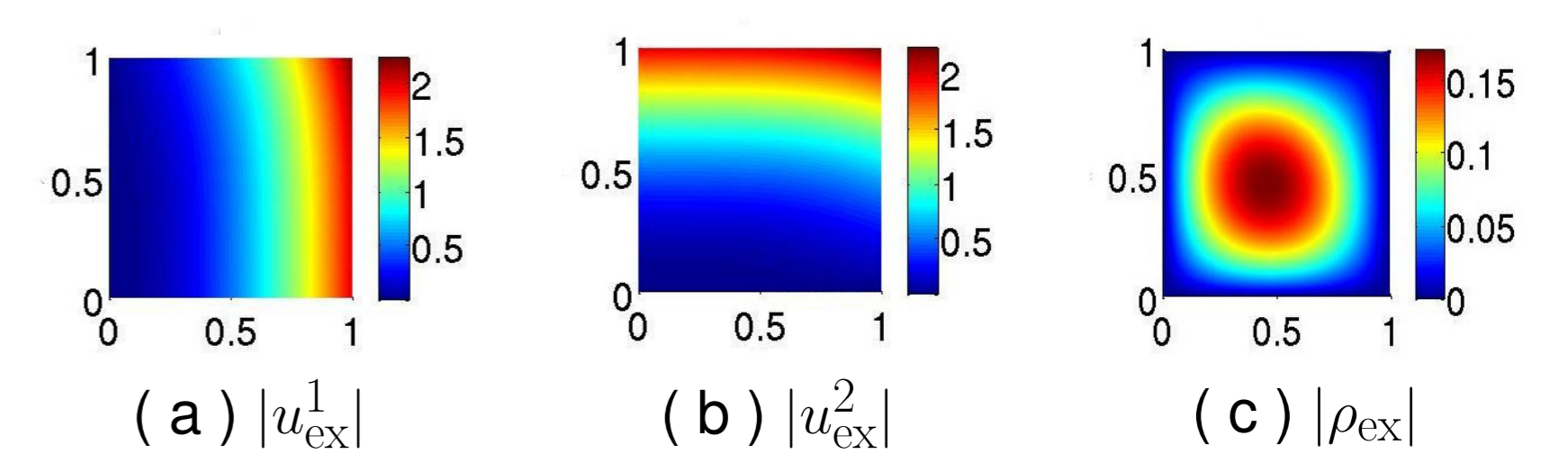


Figure 8: Module solution numérique.

References

- [1] A.K. AZIZ, S. LEVENTHAL, Finite element approximation for first order systems, SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 15, p. 1103–1111, 1978.
- [2] P.H. COCQUET, P.A. MAZET, V. MOUYSSET, On the existence and uniqueness of solution for some frequency-dependent partial differential equations coming from the modelling of metamaterials, SIAM Journal on Mathematical Analysis, vol. 44, no. 6, p. 3806–3833, 2012.
- [3] P. FERNANDES, M. RAFFETTO, Well posedness and finite element approximability of time-harmonic electromagnetic boundary value problems involving bianisotropic materials and metamaterials, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, vol. 19, no. 12, p. 2299–2335, 2009.
- [4] L. CHESNEL, P. CIARLET JR., T-coercivity and continuous Galerkin methods: application to transmission problems with sign changing coefficients, Numerische mathematik, accepté, 2012.
- [5] V.G. VESELAGO, The electrodynamics of substance with simultaneously negative values of ε and μ , Soviet Physics USPEKHI, vol. 10, no. 4, p. 509–514, 1968.
- [6] R.W. ZIOLKOWSKI, N. ENGHETA, Special issue on metamaterials, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 51, no. 10, p. 2546–2549, 2003.
- [7] S.H. LEE, C.M. PARK, Y.M. SEO, Z.G. WANG, C.K. KIM, Acoustic metamaterial with negative modulus, Journal of Physics : Condensed Matter, vol. 21, no. 21, p. 175704, 2009.