

Sur l'existence et de l'unicité de solutions pour les équations de Maxwell-Drude-Born-Fedorov en présence de métamatériaux homogénéisés

P.H Cocquet, V. Mouysset et P.A Mazet

Institut de Mathématique de Toulouse,
Onera/DTIM/M2SN

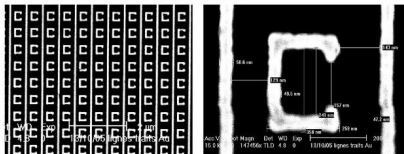
Congrès SMAI 2011, 5e Biennale Française des Mathématiques Appliquées



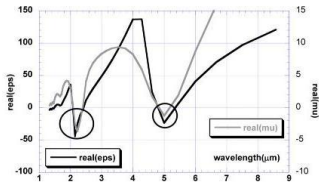
r e t o u r s u r i n n o v a t i o n

Cadre de travail :

- Structures créées à partir d'une **homogénéisation** de petits **patch** constitué de matériau **physiques**.
- Comportement **exotique** à certaines **fréquences**.



(a) Réseau périodique de S.R.R



(b) Partie réelle des paramètres homogénéisés

Fig.: Partie réelles de ϵ et μ d'un réseau périodique de SRR, Kanté B., A. De Lustrac et als, **Metamaterials for optical and radio communications.**

Applications des métamatériaux :

- Super-Lentille, (avec des **indices de réfraction négatifs**).
- Miroir d'Alice.
- Contrôle de la lumière (avec des **cristaux photoniques**).
- Invisibilité.
- Protection sismiques pour des bâtiments (avec des **métamatériaux absorbants**).
- ...

Présentation du problème

Hypothèses :

- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ = un ouvert **borné** de classe C^2 de normale unitaire sortante \mathbf{n} .
- Métamatériaux = milieux **compacts**.

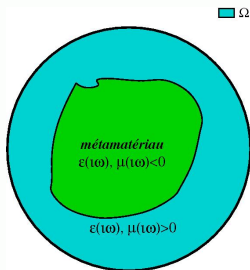


Fig.: Géométrie du problème

Système de *MDBF* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (E, H) \in \mathcal{D}(\mathbb{M}) \text{ tel que :} \\ (K(p, x) + \mathbb{M}) \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = f, L^2(\Omega)^6 \end{array} \right.$$

avec :

$$\mathcal{D}(\mathbb{M}) = \left\{ (E, H) \in H(\text{curl}, \Omega)^2 \mid \mathbf{n}(x) \times (E + \Lambda(x)(\mathbf{n}(x) \times H)) = 0, H^{-1/2}(\partial\Omega) \right\}$$

$$p = iw + \eta, \quad \mathbb{M} = \begin{pmatrix} 0 & -\nabla \times \\ \nabla \times & 0 \end{pmatrix}$$

et :

$$K(p, x) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_3 & -p\beta(p)\varepsilon(p)\mathbb{I}_3 \\ p\beta(p)\mu(p)\mathbb{I}_3 & \mathbb{I}_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p\varepsilon(p)\mathbb{I}_3 & 0 \times \mathbb{I}_3 \\ 0 \times \mathbb{I}_3 & p\mu(p)\mathbb{I}_3 \end{pmatrix},$$

$$\forall u \in \mathbb{C}^3, \text{Re} \langle (\Lambda + \Lambda^*)u, \bar{u} \rangle \geq \alpha|u|^2.$$

But

Donner des conditions sur les paramètres du métamatériau **homogénéisé** afin d'obtenir **l'existence et l'unicité** de solution au système de **Maxwell-Drude-Born-Fedorov**.

Problème

Paramètres physiques du milieu considéré **dépendent de la fréquence** et peuvent **devenir négatifs** autour de certains p .

Motivation : Schémas numériques ?

Un exemple : réseau périodique de S.R.R

B. Kanté, SN Burokur, F. Gadot, and A. de Lustrac. Métamatériau à indice de réfraction négatif en infrarouge.

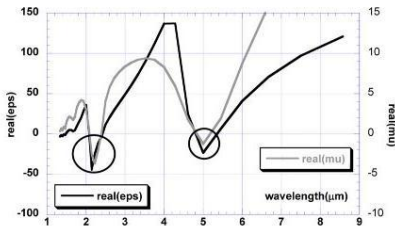


Fig.: Réseau périodique de S.R.R

Paramètres homogénéisés

$$[\varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{x})] = \left(1 + \frac{\omega_p^2}{p^2}\right) \mathbb{I}_3, \quad [\mu(\mathbf{p}, \mathbf{x})] = \left(1 + \frac{\delta p^2}{-p^2 - \omega_0^2 + p\Gamma}\right) \mathbb{I}_3, \quad [\beta(\mathbf{p}, \mathbf{x})] = 0.$$

Résultat principal

Hypothèses sur le métamatériau :

- (**Regularité en x**) $K(p, \cdot) \in C^1(\overline{\Omega}, \text{Hom}(\mathbb{C}^6))$, $\forall (p, x) \in D_0 \times \Omega$.
- (**Regularité en p**) $K(\cdot, x)$ est holomorphe et inversible pour $p \in D_0$.
- ("**Classique**") Il existe $p_0 \in D$ tel que $K(p_0)$, $j = 0, 1$ est comparable à l'identité.

Théorème

Supposons que :

- (**Regularité en x**)-(**Regularité en p**)-("**Classique**") sont vérifiées,
- $f \in H(\text{div}, \Omega)^2$.

Alors le système de MDBF est **bien posé** pour tout $p \in D_0 \setminus S$ où S est un sous-ensemble discret, localement fini et éventuellement vide de D_0 .

Prise en compte de la divergence : En développant $\operatorname{div}(K(p)(E, H))^T$, il vient :

$$K(p)^{-1}Z(p) \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{div}(E) \\ \operatorname{div}(H) \end{pmatrix} = K(p)^{-1}\operatorname{div}(f).$$

Equations de MDBF "élliptisées" :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\varphi, E, H, \psi) \in H_0^1(\Omega) \times \mathcal{D}(\mathbb{M}) \cap (H(\operatorname{div}, \Omega))^2 \times H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ (K(p, x) + \mathbb{M}) \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla \varphi \\ \nabla \psi \end{pmatrix} = f, \quad x \in \Omega \\ K(p)^{-1}Z(p) \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{div}(E) \\ \operatorname{div}(H) \end{pmatrix} + K(p)^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = K(p)^{-1}\operatorname{div}(f). \end{array} \right.$$

Considérons l'opérateur non-borné fermé (dans $L^2(\Omega)^8$) suivant :

- $\mathcal{D}(\mathbb{T}) = H_0^1(\Omega) \times \mathcal{D}(\mathbb{M}) \cap (H(\text{div}, \Omega))^2 \times H_0^1(\Omega),$

- $\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 0 & \text{div} & 0 & 0 \\ \nabla & 0 & -\nabla \times & 0 \\ 0 & \nabla \times & 0 & \nabla \\ 0 & 0 & \text{div} & 0 \end{pmatrix}.$

On doit ainsi résoudre le système :

Problème de MDBF "élliptisé"

$$\begin{cases} \text{Trouver } U = (\varphi, E, H, \psi) \in \mathcal{D}(\mathbb{T}) \text{ tel que :} \\ (\tilde{K}(p, x) + \mathbb{T})U = F(p), L^2(\Omega)^8. \end{cases}$$

Lemme

Supposons que $F(p) = (\{K(p)^{-1} \operatorname{div}(f)\}_1, f, \{K(p)^{-1} \operatorname{div}(f)\}_2)$ avec $f \in H(\operatorname{div}, \Omega)^2$. Alors $\varphi = \psi = 0$ et (E, H) sont solutions des équations de MDBF avec f comme second membre.

Preuve.

- $\operatorname{div}(\nabla \times E) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \Delta \varphi \\ \Delta \psi \end{pmatrix} = \operatorname{div}(f) - \operatorname{div} \left(K(p) \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} \right),$
- La seconde équation donne :

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \operatorname{div}(f) - \operatorname{div} \left(K(p) \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} \right).$$

- Ainsi, φ, ψ vérifient : $\begin{cases} \text{Trouver } \psi \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \Delta \psi - \psi = 0, \end{cases}$

\Rightarrow (Lax – Milgram) $\varphi = \psi = 0$. ■

Lemme

L'opérateur $(\tilde{K}(p_0) + \mathbb{T}, \mathcal{D}(\mathbb{T}))$ est *inversible à résolvante compacte*.

Preuve.

- L'opérateur $(\mathbb{T}, \mathcal{D}(\mathbb{T}))$ est **maximal monotone**.
- L'injection $\mathcal{D}(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^2(\Omega)^8$ est **compacte**.

\implies Pour tout $\alpha > 0$, l'opérateur $(\alpha + \mathbb{T})^{-1} \in \mathcal{B}(L^2(\Omega)^8)$ est compact.

Equation de type Fredholm à résoudre :

Trouver $U \in L^2(\Omega)^8$ tel que :

$$\left(\mathbb{I} + (\alpha + \mathbb{T})^{-1} \left(\tilde{K}(p_0) - \alpha \right) \right) U = (\alpha + \mathbb{T})^{-1} F = \tilde{F}.$$

- $\tilde{F} = 0 \implies$ (**Lemme**) $\varphi = \psi = 0$ et (E, H) vérifient **les équations de MDBF** avec $f = 0$.
- $K(p_0)$ coercif (par ("**Classique**")) $\implies E = H = 0$.

L'alternative de Fredholm achève alors la preuve. ■

- Par ((Regularité en x)-(Regularité en p)), la famille $(\tilde{K}(p) + \mathbb{T}, \mathcal{D}(\mathbb{T}))_{p \in D_0}$ est une famille holomorphe de type (A) à résolvante compacte pour $p = p_0$.
 \implies (Kato) la résolvante de $(\tilde{K}(p) + \mathbb{T}, \mathcal{D}(\mathbb{T}))$ est compacte pour tout $p \in D_0$.
- La théorie de Fredholm analytique et l'inversibilité de $(\tilde{K}(p_0) + \mathbb{T}, \mathcal{D}(\mathbb{T}))$ permet ainsi de montrer que $(\tilde{K}(p) + \mathbb{T}, \mathcal{D}(\mathbb{T}))$ est inversible pour tout $p \in D_0 \setminus S$.
- En prenant $F(p) = (\{K(p)^{-1} \operatorname{div}(f)\}_1, f, \{K(p)^{-1} \operatorname{div}(f)\}_2)$ avec $f \in H(\operatorname{div}, \Omega)^2$ on obtient l'inversibilité de $(K(p) + \mathbb{M}, \mathcal{D}(\mathbb{M}))$ pour tout $p \in D_0 \setminus S$.

Applications

Réseau périodique de Split-Ring-Resonator

B. Kanté, SN Burokur, F. Gadot, and A. de Lustrac. Métamatériau à indice de réfraction négatif en infrarouge.

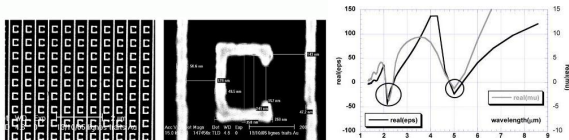


Fig.: Réseau périodique de S.R.R

Paramètres homogénéisés

$$[\varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{x})] = \left(1 + \frac{\omega_p^2}{p^2}\right) \mathbb{I}_3, \quad [\mu(\mathbf{p}, \mathbf{x})] = \left(1 + \frac{\delta p^2}{-p^2 - \omega_0^2 + p\Gamma}\right) \mathbb{I}_3, \quad [\beta(\mathbf{p}, \mathbf{x})] = 0.$$

- **Regularités** en \mathbf{x} -et en \mathbf{p} pour $D_0 = \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}, 0, \frac{\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} \right\}$.
- **"Classique"** vérifiée pour $p_0 = \frac{\Gamma}{2}$.

Métamatériau chiral de type "Ω-particle resonator"

R. Zhao, et al's. Chiral metamaterials : retrieval of the effective parameters with and without substrate. Optics Express, 18(14) :14553–14567, 2010.

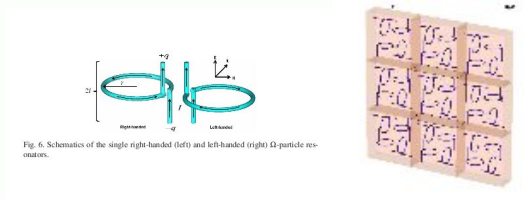


Fig. 6. Schematics of the single right-handed (left) and left-handed (right) Ω-particle resonators.

Fig.: Schéma d'un réseau de "particle resonator"

Paramètres homogénéisés

$$\begin{cases} [\varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{x})] = \varepsilon_b + \frac{\Omega_\varepsilon w_0^2}{w_0^2 + p^2 - p\gamma} \mathbb{I}_3, & [\mu(\mathbf{p}, \mathbf{x})] = \mu_b - \frac{\Omega_\mu p^2}{w_0^2 + p^2 - p\gamma} \mathbb{I}_3, \\ [\beta(\mathbf{p}, \mathbf{x})] = \frac{\Omega_\beta p}{i(w_0^2 + p^2 - p\gamma)} \mathbb{I}_3, \end{cases}$$

Conclusions et perspectives

Conclusion :

- Métamatériaux régulier \implies Problème de *MDBF* bien-posé.

Perspectives :

- Obtenir un résultat similaire avec des métamatériaux régulier par morceaux (où L^∞).
- Convergence des schémas numériques usuels (éléments finis, Galerkin discontinus, ...).
- Etude d'autres systèmes faisant intervenir des métamatériaux (élasticité linéaire, système de l'acoustique).

Merci de votre attention.